представление отображения L имеет вид

$$\bar{x}^i = \Lambda^i t + \frac{1}{2} M^i t^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (13)$$

Пусть кривая L_1 (13) является геодезической связности Врэнчану Γ [2] на гиперкомплексе V_n^S. Тогда имеют место уравнения $M^i = -\Gamma^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k$, и кривая L_1 задается следующим образом:

$$\bar{x}^i = \Lambda^i t - \frac{1}{2} W^{il} M_{ljk} \Lambda^j \Lambda^k t^2 + \langle 3 \rangle, \qquad (14)$$

где W^{il} -тензор, взаимный тензору M_{lj}.

Обозначим L_2 -геодезическую связности G на гиперкомплексе V_n^S. Для нее выполняются уравнения $M^i = -G^i_{jk} \Lambda^j \Lambda^k$. Учитывая соотношения $M_{[ij]} = 0$ и условие нашей теоремы, получим координатное представление геодезической L_2:

$$\bar{x}^i = \mu \Lambda^i \tau - \frac{1}{4} \mu^2 W^{il} M_{ljk} \Lambda^j \Lambda^k \tau^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (15)$$

Из сравнения разложений (14) и (15) следует утверждение теоремы.

Библиографический список

1. Ц а п е н к о В.П. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P,Q) //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград.1982.Вып.13.С.107-111.

2. Ц а п е н к о В.П. Аффинные связности, инвариантно присоединенные к гиперкомплексу $V_n(P,Q)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1984,Вып.15.С.100-103.

3. К о н д а к о в а Э.М., И в л е в Е.Т. О n-семействе невырожденных нуль-пар в P_n // Материалы итоговой научной конференции по математике и механике.Томск,1970.С.125-127.

УДК 514.75

О ВЛОЖЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

М.А.Ч и н а к
(Омский политехнический институт)

В статье изучается расположение комплексных подмногообразий в $\mathbb{CP}^n$ с дополнительными условиями на гиперболический тип. Пусть $M^k \subset \mathbb{CP}^n$-некоторое компактное подмногообразие, причем M^k допускает кэлерову метрику отрицательной голоморфной секционной кривизны ([1,стр.158]) и накрывается многообразием Штейна N. Предположим, что $H^2(N;\mathbb{Z}) \cong 0$. Рассмотрим произвольное подпространство $H \cong \mathbb{CP}^k$ в $\mathbb{CP}^n$, и пусть $p = p_H$ обозначает естественную проекцию $p: \mathbb{CP}^n \cap dom\, p \to H$ (где $dom\, p$ -область определения отображения p).В работе показано, что многообразие M указанного вида и подпространство $H \subset \mathbb{CP}^n$ определяют аналитическое подмножество $A \subset M$, такое, что либо отображение $p|_{M \cap dom\, p \setminus A}$ является конечнолистным накрытием на свой образ, либо $A = M$ и p всюду вырождено.Более точно справедлива

Т е о р е м а 1. Пусть $M \subset \mathbb{CP}^n$ проективно-алгебраическое замкнутое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{C}} M = k > 0$ и на M вводится кэлерова метрика отрицательной голоморфной секционной кривизны.Предположим, что M накрывается многообразием Штейна N, причем $H^2(N;\mathbb{Z}) \cong 0$. Пусть $H \cong \mathbb{CP}^k$ -некоторое подпространство в $\mathbb{CP}^n$ и $p: \mathbb{CP}^n \cap dom\, p \to H$ -естественная проекция.Тогда найдется целое число $m > 0$, такое, что если для $x \in H$ отображение p локально биголоморфно в точках множества $p^{-1}(x)$, то $card\, p^{-1}(x) \le m$. Данный результат демонстрирует жесткость комплексной структуры многообразия отрицательной кривизны.Условие теоремы является существенным, поскольку можно построить вложение в $\mathbb{CP}^n$ односвязного гиперболического по Кобаяси многообразия M_0, для которого мощность дискретных слоев некоторых отображений p_r нельзя оценить сверху единой константой.

I. Доказательство опирается на исследование гиперболического строения окрестностей в пространствах линейных голоморфных расслоений над M. В дальнейшем для любого комплексного многообразия Q и любого вектора $Y\in T_xQ$ ($x\in Q$) через $F_Q(x,Y)$ обозначим инфинитезимальную норму Кобаяси вектора Y ([2]). Если $L\to M$ -голоморфное расслоение, то символ $\langle L\rangle$ означает пространство этого расслоения с естественной комплексной структурой.

Л е м м а. Предположим, что компактное комплексное многообразие M удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть $\pi: L\to M$ является линейным голоморфным расслоением. Предположим, что W некоторая окрестность в $\langle L\rangle$, причем дополнение $\langle L\rangle\setminus W$ относительно компактно и содержит некоторую окрестность нулевого сечения. Выберем область $U\subset M$, над которой расслоение $L|_U$ комплексно-аналитически тривиально, и рассмотрим произвольную C^∞ эрмитову метрику g в U. Фиксируя тривиализацию $\Phi:\langle L|_U\rangle\to U\times\mathbb{C}$, обозначим через $\|\cdot\|_U$ инфинитезимальную норму в $\langle L|_U\rangle$, ассоциированную с прообразом метрики $g\times e$ при отображении Φ (здесь e -стандартная евклидова метрика на $\mathbb{C}$ и символ $g\times e$ означает метрику-произведение). Тогда для любого относительно компактного подмножества $\mathcal{D}$ в U существует $C>0$, что при всех векторах $Y\in T_v\langle L\rangle$ (где $v\in W\cap\langle L|_{\mathcal{D}}\rangle$) справедлива оценка

$$F_W(v,Y)\geqslant C\,\|Y\|_U. \qquad (1)$$

Приведем набросок доказательства этой леммы. Пусть $f: N\to M$ является накрытием из условия теоремы 1. Поскольку N -многообразие Штейна и $H^2(N;\mathbb{Z})\cong 0$, то из точной экспоненциальной последовательности легко следует, что расслоение f^*L тривиально. Если теперь $\tilde f:\langle f^*L\rangle\to\langle L\rangle$ означает накрытие пространств расслоений, индуцированное отображением f, то окрестность $\tilde f^{-1}(W)$ легко снабжается кэлеровой метрикой-произведением голоморфной секционной кривизны $\leqslant -|K|<0$. Отсюда с использованием известного дифференциально-геометрического критерия гиперболичности ([2, стр. 371]) получаем оценку типа (1) для $F_{\tilde f^{-1}(W)}(v,Y)$. Неравенство (1) следует теперь из вида отображения $\tilde f$ и из того факта, что голоморфное накрытие является локальной изометрией для метрики Кобаяси ([2, стр. 263]).

2. Вкратце об основных моментах доказательства теоремы I. Предположим, что $\mathrm{dom}\,p\cap M\neq\varnothing$ и p локально биголоморфно в

некоторой точке $x\in M$. Пусть $\pi: L\to M$ -расслоение гиперплоского сечения, отвечающее заданному вложению $M\subset\mathbb{CP}^n$. Без ограничения общности можно считать, что существует набор глобальных голоморфных сечений $\Gamma=\{\gamma_1,\dots,\gamma_{k+1}\}$ ($\gamma_i\in H^0(M;\mathcal{O}(L))$) с базисным множеством $B=\{x\in M\mid \gamma_1=\ldots=\gamma_{k+1}=0\}$, причем B является собственным аналитическим подмножеством в M и естественное отображение $M\setminus B\to\mathbb{P}(\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{\gamma_1,\dots,\gamma_{k+1}\})$ совпадает с $p|_{M\cap\mathrm{dom}\,p}$. Рассмотрим отображение $\psi_\Gamma(v)=(\gamma_1(v),\dots,\gamma_{k+1}(v))$, $v\in\langle -L\rangle$; $\langle -L\rangle\to\mathbb{C}^{k+1}$. Достаточно показать, что для некоторого собственного аналитического подмножества $\Lambda\subset\langle -L\rangle$ сужение $\psi_\Gamma|_{\langle -L\rangle\setminus\Lambda}$ является конечнолистным накрытием на свой образ. Для этого построим наборы $\Gamma_p=\{\gamma_{1,p},\dots,\gamma_{k+1,p}\}$ глобальных голоморфных сечений расслоения L, $p=1,2,\dots$, которые порождают линейные системы без базисных точек ([3, стр. 193]), причем ассоциированные отображения ψ_p сходятся к ψ_Γ равномерно на компактных подмножествах $\langle -L\rangle$. Поэтому при всех $p>p_0$ отображения ψ_p имеют конечные слои мощности $d(p)$, за исключением собственного аналитического подмножества A_p. Применяя лемму к расслоению $-L$, показываем, что числа $d(p)$ равномерно ограничены сверху. Поскольку $\psi_p\to\psi_\Gamma$ при $p\to\infty$, то это влечет искомое утверждение.

Используя известный результат Ву ([4, стр. 515]) и теорему Картана-Адамара, получаем

С л е д с т в и е. Теорема 1 справедлива для компактных комплексных многообразий $M\subset\mathbb{CP}^n$ с кэлеровой метрикой отрицательной секционной кривизны.

Библиографический список

1. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2. 416 с.
2. Kobayashi Sh. Intrinsic distances, measures and geometric function theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. T. 82. № 3. P. 357 - 416.
3. Г р и ф ф и т с Ф., Х а р р и с Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир. 1982. Т. 1. 496 с.
4. Wu H.-H. Negatively curved Kähler manifolds // Notices Amer. Math. Soc., 1967. №14. P. 515.